

Domácí úkol z předmětu Moderní teorie řízení

Řízení podélného modelu letadla F16

Michal Dvořák, Jan Doležal

9.1.2007



1 Úvod

Cílem této práce je sestavit matematický model letadla F16 v podélné ose a realizovat řízení sklonu letadla pomocí nějakého optimálního regulátoru. Podélný model letadla má tři stupně volnosti a vstupem je úhel vychýlení výškového kormidla. Aby bylo dosaženo dobré věrohodnosti chování letadla, byl sestaven kompletní nelineární matematický model s využitím aerodynamických charakteristik naměřených na zmenšeném modelu letadla v aerodynamickém tunelu. Pro aplikaci metod moderní teorie řízení je nutné nejprve model linearizovat a teprve poté navrhovat regulátor. Navržený regulátor byl nakonec odzkoušen na původním nelineárním modelu.

Nevýhoda tohoto postupu spočívá v tom, že navržený regulátor odpovídá dobře původnímu modelu pouze v okolí pracovního bodu, kde byl systém linearizován. V praxi se to řeší navržením několika regulátoru pro linearizované modely v různých pracovních bodech. V provozu se tyto regulátory přepínají podle aktuálních hodnot stavových veličin. Tato metoda se nazývá *gain scheduling*.

2 Matematický model

V celém textu budeme používat následující značení:

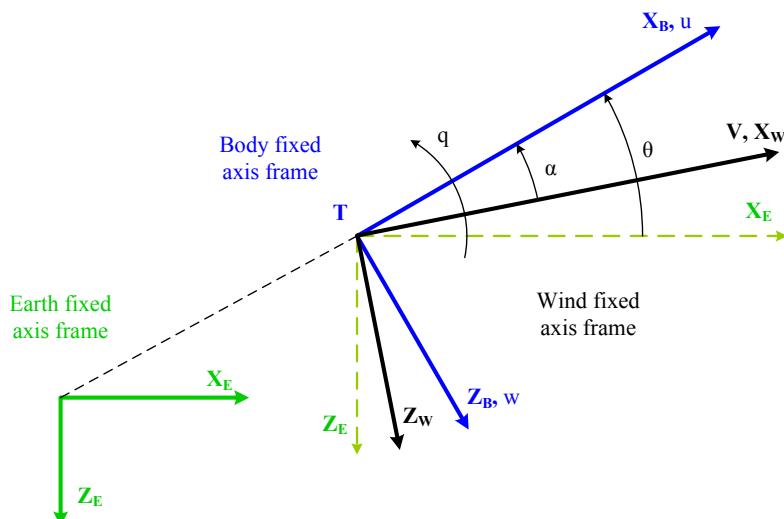
v_T	-	celková rychlost letadla, [m/s]
u	-	složka rychlosti ve směru x, [m/s]
w	-	složka rychlosti ve směru z, [m/s]
θ	-	úhel sklonu letadla, [rad]
q	-	úhlová rychlost letadla, [rad/s]
x_E	-	x-souřadnice letadla vůči zemi, [m]
z_E	-	z-souřadnice letadla vůči zemi, [m]
C_{X_T}	-	celkový aerodynamický koeficient v ose x, [-]
C_{Z_T}	-	celkový aerodynamický koeficient v ose z, [-]
C_{M_T}	-	celkový aerodynamický moment, [-]
C_D	-	koeficient vztlaku letadla, [-]
C_L	-	koeficient odporu letadla, [-]
C_M	-	koeficient momentu letadla, [-]

Fyzikální konstanty:

g	9.81	-	gravitační zrychlení, [m/s ²]
ρ	1.225	-	hustota vzduchu, [kg/m ³]
m	9295	-	hmotnost letadla, [kg]
I_y	75673	-	moment setrvačnosti letadla, [kg.m ²]
S	27.87	-	plocha křídla, [m ²]
δ	$\langle -25, 25 \rangle$	-	výchylka výškovky, [deg]
F_T	130	-	maximální tah motoru, [kN]

2.1 Souřadné soustavy

Při popisu kinematiky letu budeme používat tři souřadné soustavy. Soustava \mathbf{S}_E je spojena se zemským povrchem. Soustava \mathbf{S}_B je pevně svázaná s letadlem, její počátek se volí v těžišti letadla \mathbf{T} , podélná osa \mathbf{X}_B leží v podélné ose letadla. Aerodynamická souřadná soustava \mathbf{S}_W má směr \mathbf{X}_W shodný s vektorem rychlosti \mathbf{V} nabíhajícího vzduchu.



Obrázek 1: Souřadné soustavy.

Při takto zavedených soustavách můžeme pro pohyb letadla psát

$$\dot{x}_E = u \cos \theta + w \sin \theta, \quad (1)$$

$$\dot{z}_E = -u \sin \theta + w \cos \theta, \quad (2)$$

$$v_T = \sqrt{u^2 + w^2}, \quad (3)$$

$$\alpha = \arctan \frac{w}{u}. \quad (4)$$

2.2 Pohybové rovnice

Pro letadlo pevně svázané se souřadnou soustavou \mathbf{S}_B , konající pod vlivem vnějších sil a momentů posuvný a rotační pohyb, platí pro výslednou vnější sílu

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{V}, \quad (5)$$

kde \mathbf{V} je rychlost pohybu těžiště a $\boldsymbol{\omega}$ je celková úhlová rychlost letadla vzhledem k souřadné soustavě země \mathbf{S}_E . Vzhledem k tomu, že sestavujeme rovnice pouze pro podélný pohyb má vektor $\boldsymbol{\omega}$ pouze jednu složku q udávající úhlovou rychlost okolo osy \mathbf{Y}_B .

Celkovou sílu \mathbf{F} rozepíšeme do jednotlivých složek ve směrech os \mathbf{X}_B a \mathbf{Z}_B

$$F_x = m(\dot{u} + qw), \quad (6)$$

$$F_z = m(\dot{w} - qu), \quad (7)$$

kde síly F_x a F_z závisejí na aerodynamických silách, tahu motoru a na průmětech hmotnosti letadla do jednotlivých os.

$$F_x = F_T + \frac{1}{2}\rho SC_{X_T}v_T^2 - mg \sin \theta \quad (8)$$

$$F_z = \frac{1}{2}\rho SC_{Z_T}v_T^2 + mg \cos \theta \quad (9)$$

Pro výsledný moment působící na letadlo platí rovnice

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}, \quad (10)$$

kde $\mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ je moment hybnosti letadla. Pro náš rovinný model má matice \mathbf{I} pouze složku I_y a pro výsledný moment okolo osy \mathbf{Y}_B platí

$$M_y = \dot{q}I_y, \quad (11)$$

$$M_y = \frac{1}{2}\rho S C_{M_T} v_T^2. \quad (12)$$

Na základě výše uvedených odvození můžeme celou kinematiku letadla popsat pomocí soustavy čtyřech rovnic

$$\dot{u} = \frac{F_x}{m} - qw - g \sin \theta, \quad (13)$$

$$\dot{w} = \frac{F_z}{m} + qu + g \cos \theta, \quad (14)$$

$$\dot{q} = \frac{M_y}{I_y}, \quad (15)$$

$$\dot{\theta} = q. \quad (16)$$

2.3 Aerodynamické koeficienty

Ve výše uvedených odvozeních závisely aerodynamické síly na celkových aerodynamických koeficientech C_{X_T} , C_{Z_T} v osách \mathbf{X}_B , \mathbf{Z}_B a na celkovém aerodynamickém momentu C_{M_T} . Tyto parametry zavisejí na mnoha veličinách, především na úhlech náběhu aerodynamických ploch a jsou zjišťovány měřením v aerodynamickém tunelu.

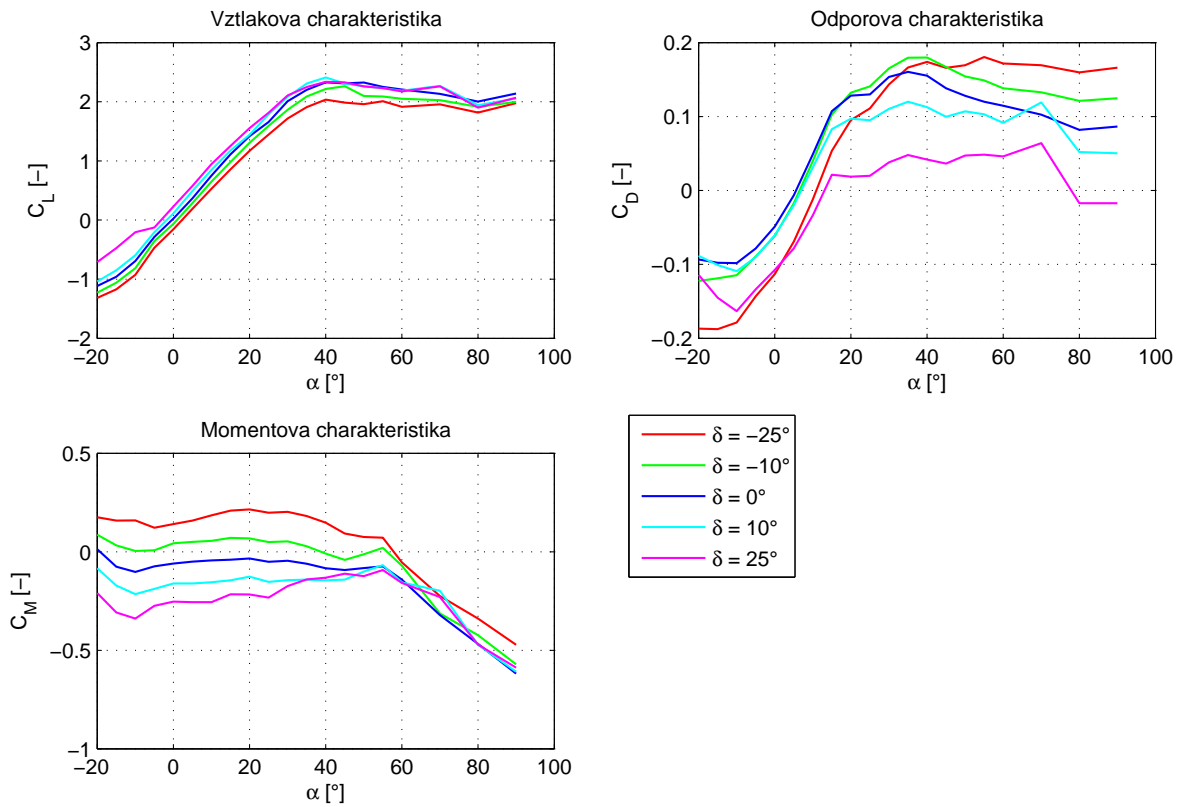
Pro náš model jsme použili data pocházející z výzkumného centra NASA Ames and Langley, kde byly pořízeny měření v aerodynamickém tunelu na zmenšeném modelu letadla F16. Z těchto dat jsme separovali hodnoty pro podélný model letadla a vzali v úvahu pouze základní členy odporu, vztlaku a momentu. Zanedbali jsme tedy členy závislé na rychlosti letu a na dalších aerodynamických prvcích jako je například pohyblivá náběžná hrana křídla.

Pro celkové aerodynamické koeficienty v našem případě platí

$$C_{X_T} = -C_D(\alpha, \delta), \quad (17)$$

$$C_{Z_T} = -C_L(\alpha, \delta), \quad (18)$$

$$C_{M_T} = C_M(\alpha, \delta). \quad (19)$$

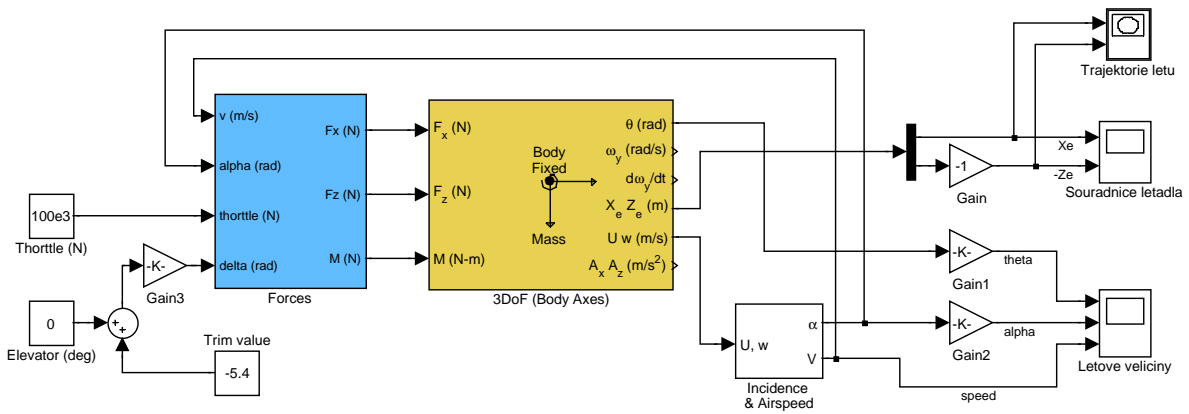


Obrázek 2: Aerodynamické koeficienty.

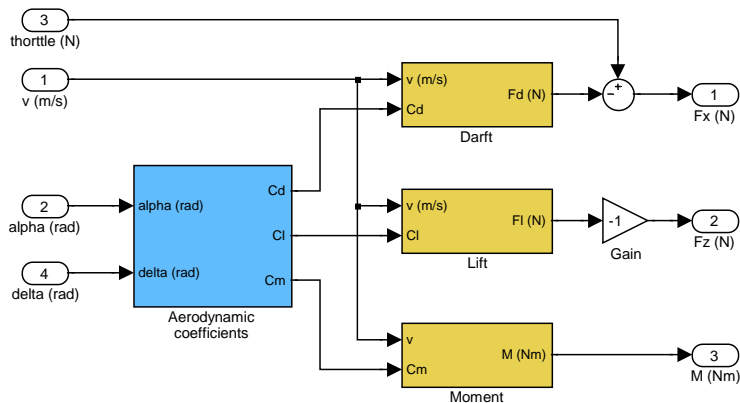
2.4 Simulace

Nelineární model byl odzkoušen v programu SIMULINK. Na obrázku (3) je vidět celkový model. Blok Forces (obr. 4) vypočítává aerodynamické síly. Aerodynamické koeficienty jsou získávány v závislosti na úhlech θ a δ lineární interpolací v bloku Aerodynamic coefficients (obr. 5). Blok 3DoF z Aerospace blocksetu realizuje pohybové rovnice.

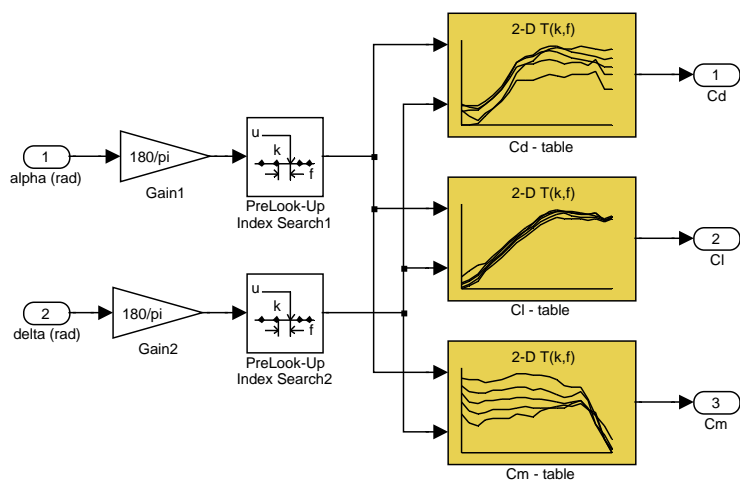
Vstupem modelu je výchylka výškovky δ a zobrazované výstupy jsou letové veličiny θ, α, v_T a trajektorie letu. Počáteční podmínky simulace byly $v_T = 150$ m/s, $\theta = 0.05$ rad, $\alpha = 0.05$ rad a tah motoru $F_T = 100$ kN. Na obrázcích (6) a (7) je vidět výsledek simulace po dobu letu 10 s.



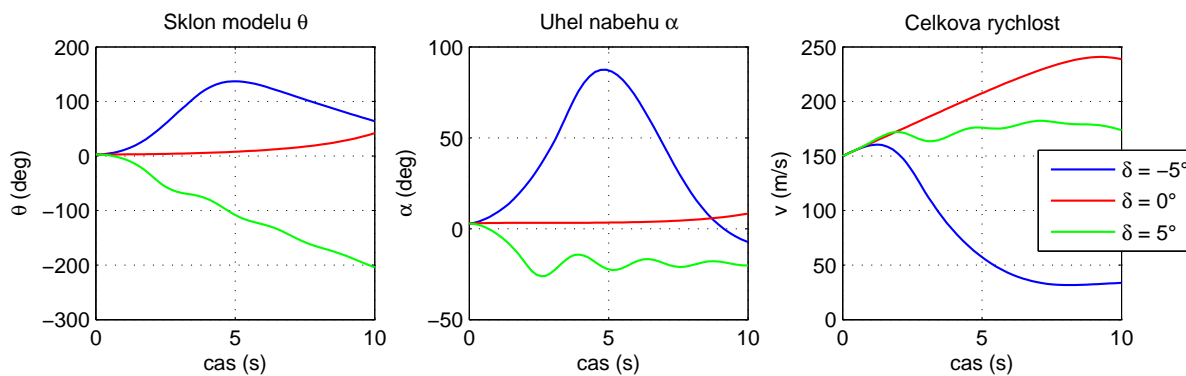
Obrázek 3: Celkový nelineární model.



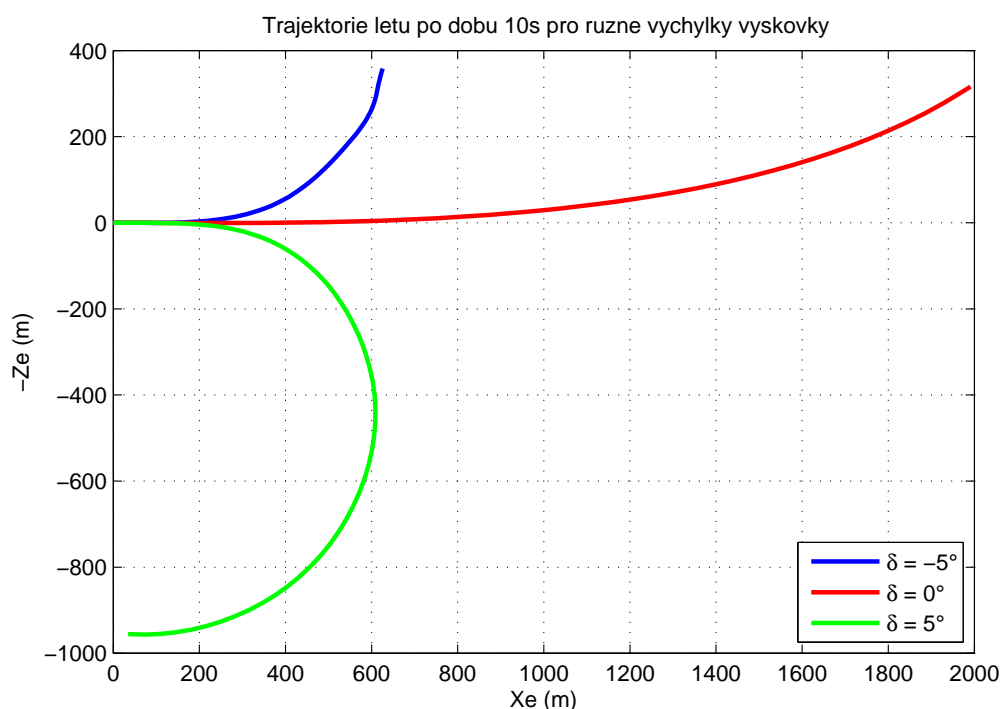
Obrázek 4: Blok Forces.



Obrázek 5: Blok Aerodynamic coefficients.



Obrázek 6: Letové veličiny při simulaci pro různé výchylky výškovky.



Obrázek 7: Trajektorie letu po dobu 10 s při různých vychylkách výškovky.

3 Linearizace

Pro návrh regulátoru potřebujeme získat diskretní linearizovaný model ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k). \end{aligned} \quad (20)$$

Nelineární model byl linearizován v programu MATLAB pomocí funkce `linmod` a diskretizován s periodou $T_s = 0.05$ s. Stavový vektor byl zvolen $\mathbf{x} = [\theta, u, w, q]^T$. Linearizace byla provedena v pracovním bodě

$$\mathbf{x}_0 = [0.05 \text{ rad}, 149.8 \text{ m/s}, 7.5 \text{ m/s}, 0 \text{ rad/s}]^T,$$

který odpovídal počátečnímu stavu simulace nelineárního modelu z předchozí kapitoly. Matice linearizovaného systému jsou

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0500 \\ -0.4901 & 1.0012 & -0.0067 & -0.4125 \\ -0.0233 & -0.0021 & 0.9461 & 7.2859 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0002 & 1.0006 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0018 \\ -0.0266 \\ -0.0026 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

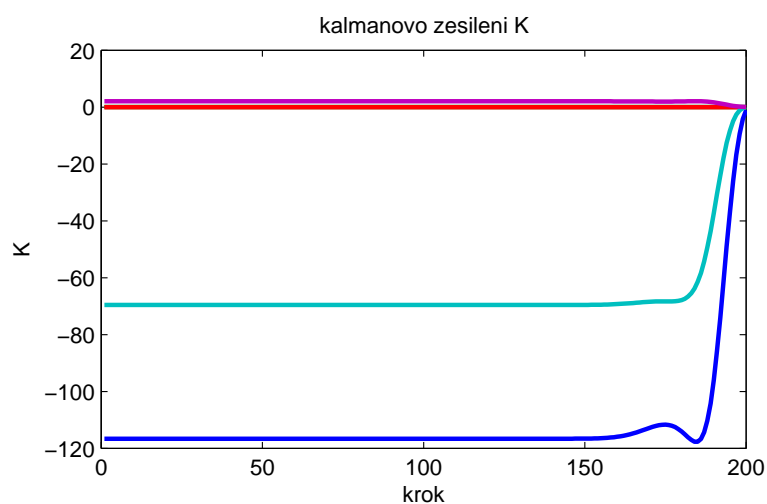
$$\mathbf{C} = [180/\pi \ 0 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{D} = [0].$$

Vstupem systému je úhel vychýlení výškovky δ a výstupem je sklon letadla θ .

4 Řízení

Ve cvičení z předmětu MTR jsme procvičovali návrhy různých regulátorů. Nezkoušeli jsme však jejich vzájemné porovnání, které nás zajímalo a rozhodli jsme se proto pro linearizovaný model letadla navrhnout tři různé regulátory, a to:

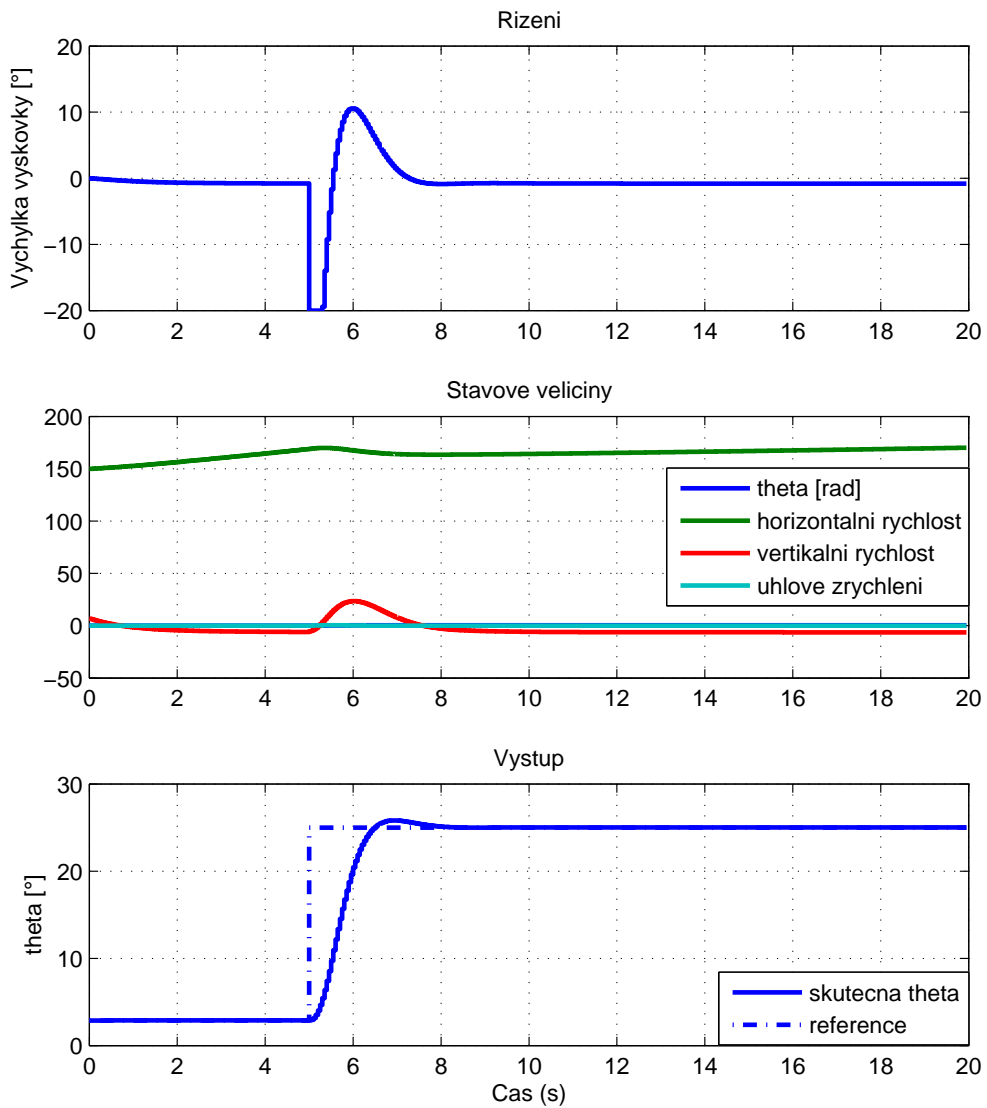
1. LQ regulátor sledování.
2. Analytický prediktivní regulátor bez omezení.
3. Prediktivní regulátor s omezením řídicí výškovku pomocí funkce quadprog.



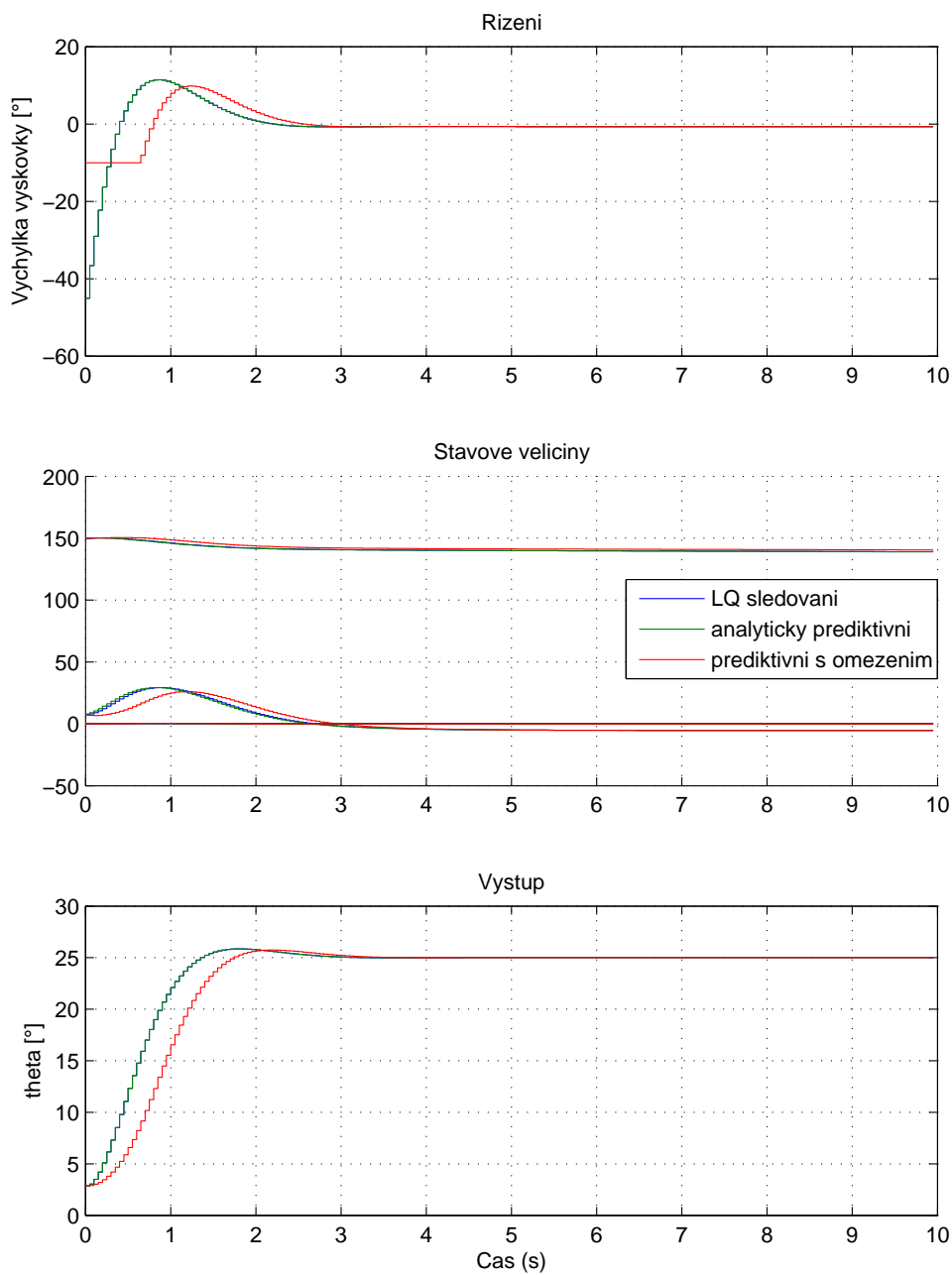
Obrázek 8: Konvergence kalmanova zesilení K u LQ regulátoru.

Abychom mohli všechny regulátory porovnat, zvolili jsme shodné parametry, a to:

- referenční úhel $\theta = 25^\circ$
- parametry kvadratického kritéria $Q = 5$ a $R = 1$
- délku simulace 10 s, které odpovídá $N = 200$ vzorků při periodě vzorkování $T_s = 0.05$ s
- pro prediktivní regulátory délku predikce 50 kroků



Obrázek 9: Časové průběhy prediktivního regulátoru s omezením.

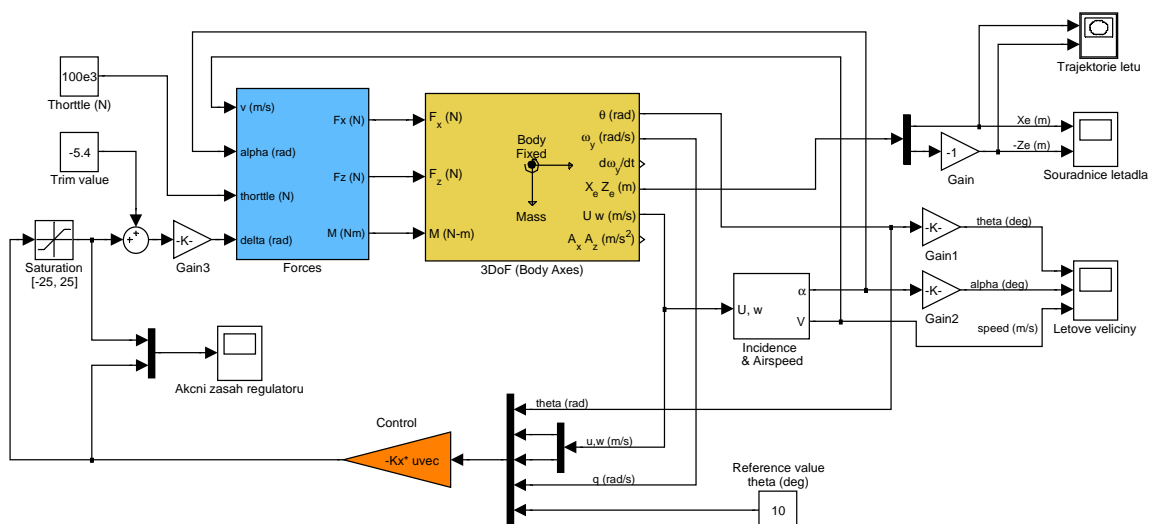


Obrázek 10: Porovnání všech třech regulátorů.

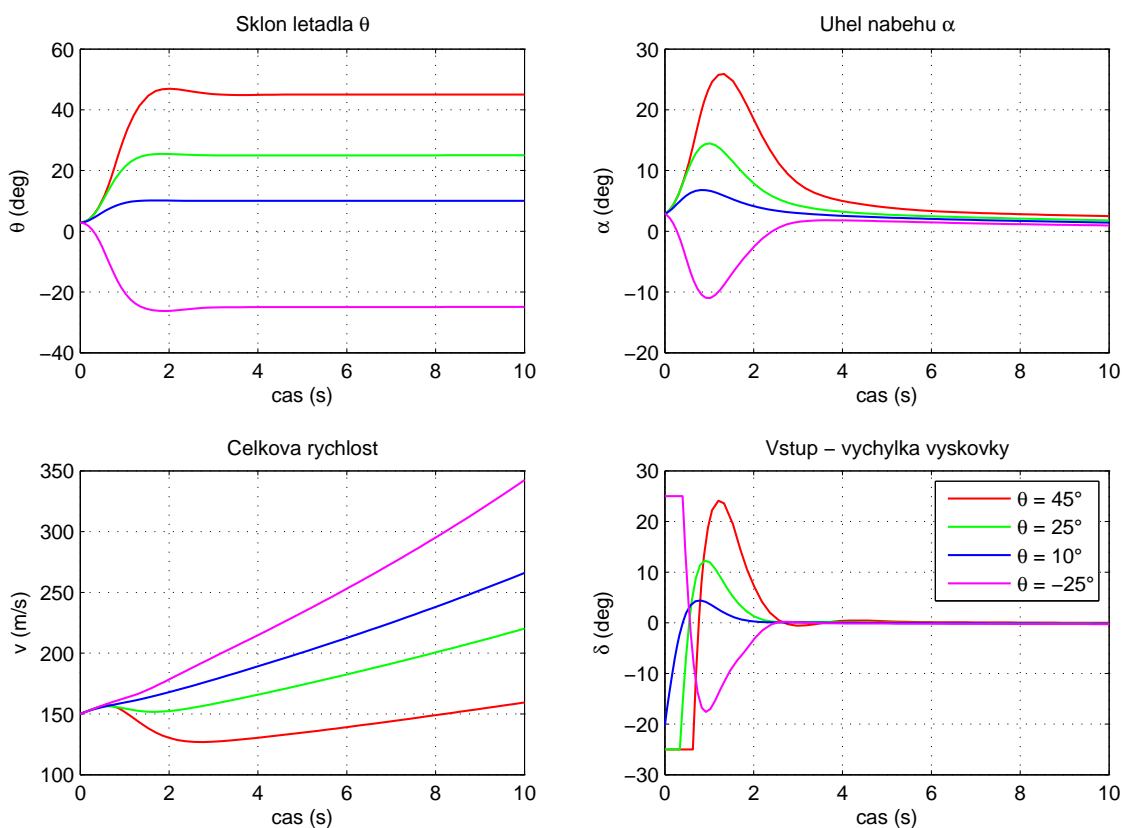
Z porovnání všech regulátorů na obrázku (10) je patrné, že jsou prakticky shodné. To je způsobeno použitím kvadratického kritéria u všech návrhů. Pouze prediktivní regulátor s omezením akčního zásahu má pochopitelně pomalejší odezvu.

4.1 Řízení nelineárního modelu

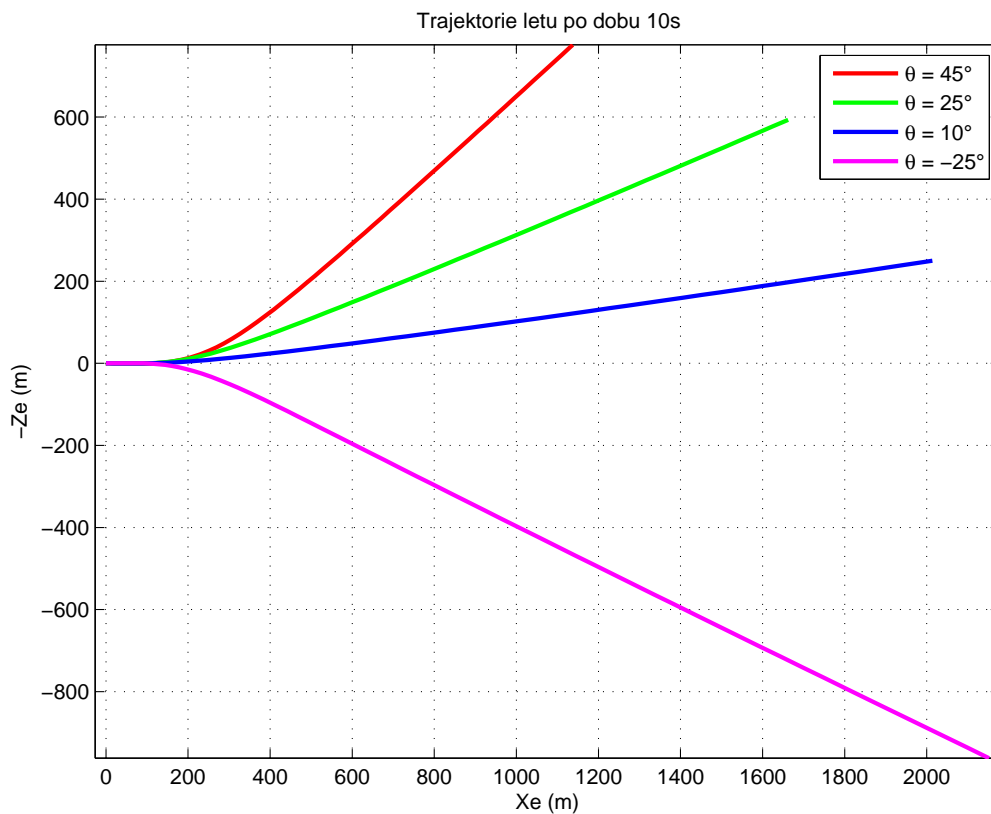
Na obrázku (11) je blokové schéma použité pro testování regulátoru na nelineárním modelu. Funkčnost navrženého LQ regulátoru byla ověřena při řízení letadla na několik úhlů sklonu. Výsledky jsou na obrázcích (12) a (13).



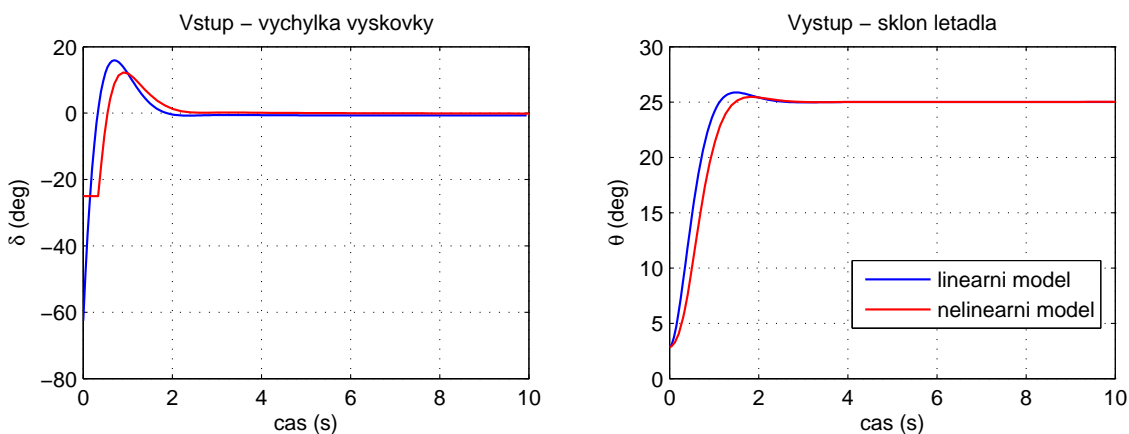
Obrázek 11: Blokový model použitý k testování regulátorů na nelin. modelu.



Obrázek 12: Řízení nelin. modelu LQ regulátorem pro různé úhly sklonu (stavové veličiny a vstup).



Obrázek 13: Řízení nelin. modelu LQ regulátorem pro různé úhly sklonu (trajektorie letu po dobu 10 s).



Obrázek 14: Srovnání chování LQ regulátoru na lineárním a nelineárním modelu.

5 Závěr

Podařilo se nám sestavit podrobný nelineární matematický model letadla F16 v podélné ose. Výsledky simulace celkem odpovídají předpokladům chování skutečného letadla.

Pro linearizovaný model letadla bylo navrženo několik kvadraticky optimálních regulátorů, které dávaly velmi podobné výsledky. LQ regulátor byl poté odzkoušen i na původním nelineárním modelu, kde vykazoval taktéž velmi dobré výsledky a to dokonce v širokém rozsahu regulované veličiny úhlu sklonu letadla θ . Na obrázku (13) jsou vidět trajektorie letu pro různé úhly sklonu letadla od -25° do $+45^\circ$. Srovnání odezvy lineárního a nelineárního modelu vychází taktéž velmi podobně. Z provedených experimentů tedy můžeme usoudit, že optimální regulátory navržené pro linearizovaný systém můžeme v tomto případě s úspěchem použít i pro skutečný nelineární model.

Reference

- [1] J. Štecha, V. Havlena: *Teorie dynamických systémů*. Skriptum ČVUT, FEL 2002.
- [2] J. Štecha, V. Havlena: *Moderní teorie řízení*. Skriptum ČVUT, FEL 1999.
- [3] L. Sonneveldt: *Nonlinear F-16 Model Description*. Delft University of Technology, Netherlands, 2006.