

Domácí úkol z předmětu Moderní teorie řízení

Kalmanův filtr

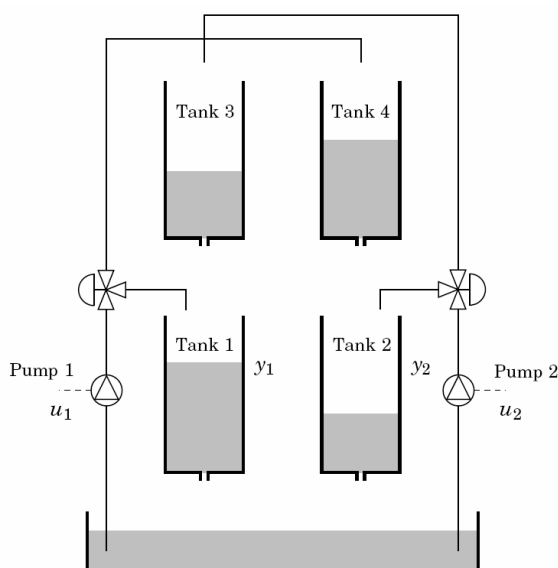
Michal Dvořák
Jan Doležal

30.11.2006

1 Stochastické systémy

1.1 Zadání

Uvažujte zjednodušený model vodovodní rozvodné sítě jako čtyři spojené nádoby a dvě čerpadla (Obrázek 1). Uvažujte neměřené odběry vody z nádrží, které modelujte jako náhodné šumy procesu a dále šumy měření výšky hladiny v tanku 1 a 2, které mohou být dány například použitím jednoduchého snímače a rozvlněné hladiny.



Obrázek 1: Model vodovodní sítě jako čtyři spojené nádrže

Proveďte diskretizaci a doplňte model na stochastický přidáním šumu procesu a šumu měření

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + v(t), \\y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t),\end{aligned}$$

Tabulka 1: Parametry modelu vodovodní rozvodné sítě

výška hladiny v i-té nádrži	h_i		m
výšky hladin v pracovním bodě	h^0	$\begin{pmatrix} 9.99 & 9.98 & 3.26 & 1.83 \end{pmatrix}^T$	m
průtok i-tým čerpadlem	q_i		$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
průtoky v pracovním bodě	q^0	$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}^T$	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
plocha průřezu i-té nádrže	A_i		3 m^2
plocha průřezu výtoku i-té nádrže	a_i		0.05 m^2
poloha i-tého ventilu	γ_i		0.3

s vlastnostmi šumu

$$E\{v(t)\} = 0, \quad E\{e(t)\} = 0, \quad \text{cov} \begin{Bmatrix} v(t) \\ e(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{pmatrix}.$$

Kovarianční matice \mathbf{Q} , \mathbf{R} vhodně zvolte k velikosti deterministického signálu.

1.2 Stavový popis

Dle zadání je linearizovaný model kolem pracovního bodu je následující

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)}{A_4} & 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t), \end{aligned}$$

kde $T_i = \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}$. Vektor stavu představuje odchylky výšky jednotlivých hladin od pracovního bodu $x(t) = \begin{pmatrix} \Delta h_1(t) & \Delta h_2(t) & \Delta h_3(t) & \Delta h_4(t) \end{pmatrix}^T$, akčním zásahem jsou odchylky průtoku čerpadly oproti pracovnímu bodu $u(t) = \begin{pmatrix} \Delta q_1(t) & \Delta q_2(t) \end{pmatrix}^T$ a koeficienty mají významy podle tabulky 1.

Tento systém diskretizujeme s periodou $T_s = 0.3$ s a doplníme na stochastický model přidáním bílého šumu procesu a měření. Stavové rovnice pak jsou:

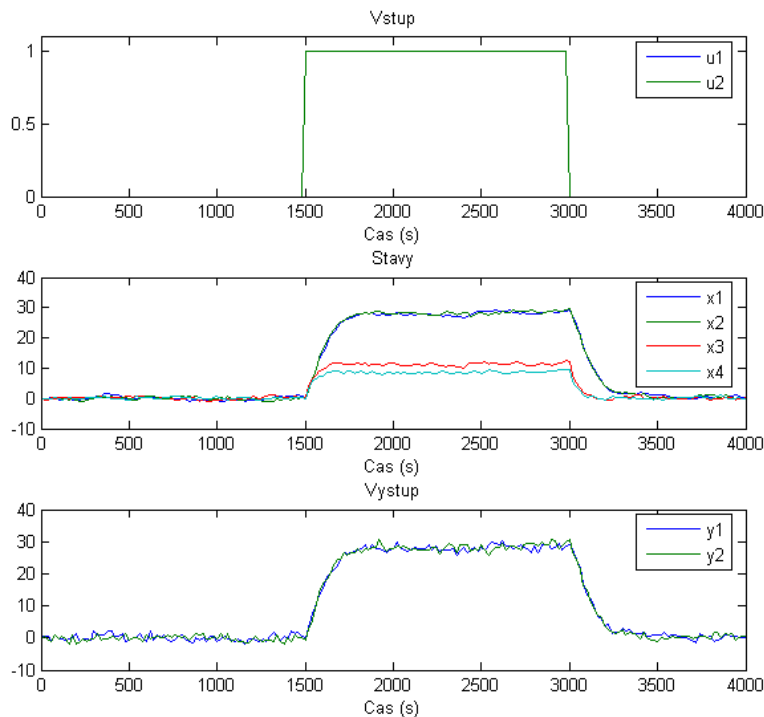
$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + v(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t), \end{aligned}$$

Kovarianční matice volíme

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

1.3 Simulace

Pro bílý šum odpovídá střední hodnota veličiny stochastického systému veličině deterministického systému. Proto nejprve simulujeme průběh po dobu $T = 4000$ s bez šumu. Tím zjistíme střední hodnoty signálů. Poté simulujeme se šumem.



Obrázek 2: Průběh vstupu, stavů a výstupu

1.4 Ustálená kovariance P_{yy} výstupu $y(t)$

K výpočtu ustálené kovarianční matice vstupu P_{xx} pomocí Lyapunovy rovnice využijeme v MATLABu příkaz `dlyap`.

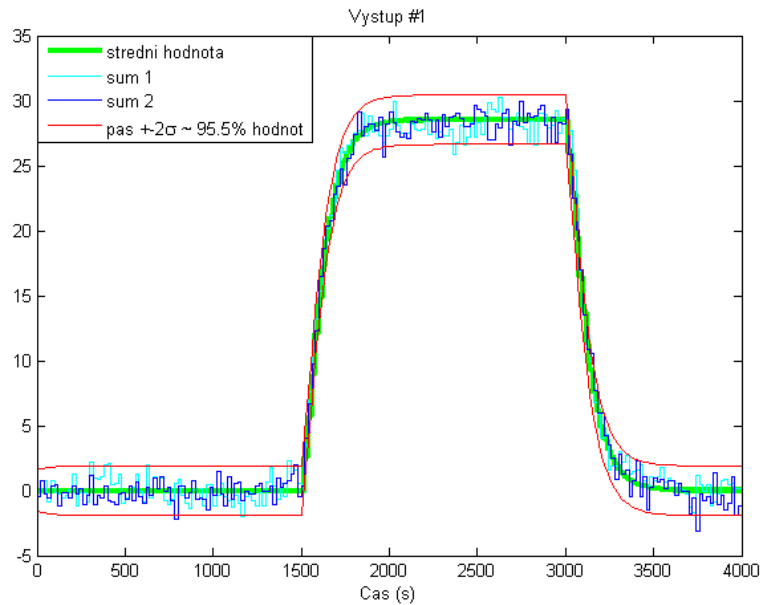
$$P_{xx} = \text{dlyap}(A, Q)$$

Z ustálené kovarianční matice vstupu pak dopočítáme ustálenou kovarianční matici výstupu P_{yy}

$$P_{yy} = CP_{xx}C^T + R$$

Ustálené kovarianční matice získané výpočtem z Lyapunovy rovnice se shodují s maticemi vypočítanými v ustáleném stavu simulace.

$$P_{yy} = \begin{pmatrix} 0.9041 & 0 \\ 0 & 0.9175 \end{pmatrix}$$



Obrázek 3: Realizace výstupu pro různé šумы v porovnání se střední hodnotou

2 LMS odhad

2.1 Zadání

Uvažujte, že máte k dispozici data populace udávající pro každého jedince jeho výšku h a váhu m . Na základě těchto dat naleznete LMS odhad, který bude z výšky odhadovat váhu ve tvaru

$$\hat{m}_{LMS}(h) = ah + b$$

2.2 Řešení

Nejprve spočítáme střední hodnotu výšky E_h a střední hodnotu váhy E_m z vygenerovaných dat. Dále

$$P_{hh} = \varepsilon \left\{ (h - E_h)(h - E_h)^T \right\}$$

$$P_{mh} = \varepsilon \left\{ (m - E_m)(h - E_h)^T \right\}$$

Pro lineární odhad minimalizující střední kvadratickou chybu pak platí:

$$b = E_m - aE_h$$

$$aP_{hh} - P_{mh} = 0$$

Tyto rovnice můžeme pro regulární matici P_{hh} upravit na tvar

$$b = E_m - P_{mh}P_{hh}^{-1}E_h$$

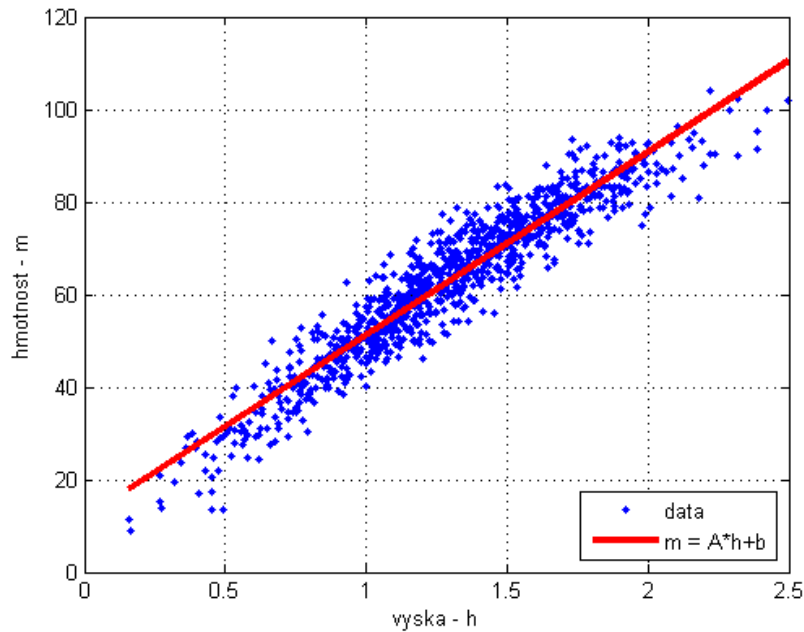
$$a = P_{mh}P_{hh}^{-1}$$

Numerické řešení je závislé na náhodně vygenerovaných datech, například:

$$\begin{aligned}E_h &= 1.30 \\E_m &= 63.68 \\P_{hh} &= 153.28 \\P_{mh} &= 5998 \\a &= 39.13 \\b &= 12.66\end{aligned}$$

To vede na lineární kvadraticky optimální odhad závislosti váhy na výšce

$$\hat{m}_{LMS}(h) = 39.13h + 12.66$$



Obrázek 4: Závislost váhy na výšce

2.3 Poznámka

Zadaný generátor s velkou pravděpodobností generuje i záporné hmotnosti. To je sice fyzikálně nemožné, ale pro účel našeho výpočtu LMS to nevadí, a proto tento případ neošetřujeme a vybrali jsme numerický případ, kde k tomuto jevu nedochází.

3 Kalmanův filtr

3.1 Zadání

Pro stochastický systém z bodu 1 navrhnete Kalmanův filtr. Nejprve při návrhu uvažujte známé stochastické parametry \mathbf{Q} , \mathbf{R} (zvolené hodnoty z bodu 1). Následně vyzkoušejte několik návrhů pro jiné hodnoty \mathbf{Q} a \mathbf{R} (případ kdy je dopředu neznáte). Jaký je vliv \mathbf{Q} , \mathbf{R} na

- časové průběhy odhadu stavů $\hat{x}(t)$ a výstupů $\hat{y}(t)$,
- ustálenou hodnotu Kalmanova zesílení L a póly uzavřené smyčky $A - LC$.

Analyzujte vliv špatného předpokladu o vlastnostech šumu, které jste uvažovali při návrhu Kalmanova filtru.

Pro Kalmanův filtr se správnými parametry šumu naleznete ustálenou hodnotu Kalmanova zesílení a jemu odpovídající časově neproměnný Kalmanův filtr. Porovnejte jej s časově proměnným.

3.2 Návrh filtru

Kalmanův filtr řeší úlohu odhadování stavu stochastického systému na základě optimálního LMS odhadu. Algoritmus výpočtu Kalmanova filtru generuje posloupnost odhadu stavu $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ a kovariační matice chyb odhadu $\mathbf{P}(k|k)$, přičemž odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ v každém kroku minimalizuje kritérium

$$J_{LMS} = \text{trace } \mathbf{P}(k|k).$$

Vlastní algoritmus můžeme rozdělit do dvou kroků. V *datovém kroku* opravíme odhad stavu v čase k na základě dat až do času $k-1$ a chyby odhadu výstupu násobené Kalmanovým zesílením. Podobně opravíme i kovariační matici \mathbf{P} .

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{L}'(k)\varepsilon(k|k-1), \\ \mathbf{P}(k|k) &= \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{L}'(k)\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1),\end{aligned}$$

kde $\varepsilon(k|k-1) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k|k-1)$.

V *časovém kroku* vypočítáme odhad stavu pro následující čas $k+1$ z odhadu stavu a ze znalostí dat až do času k . Podobně provedeme odhad i pro výpočet kovarianční matice chyb odhadu $\mathbf{P}(k+1)$.

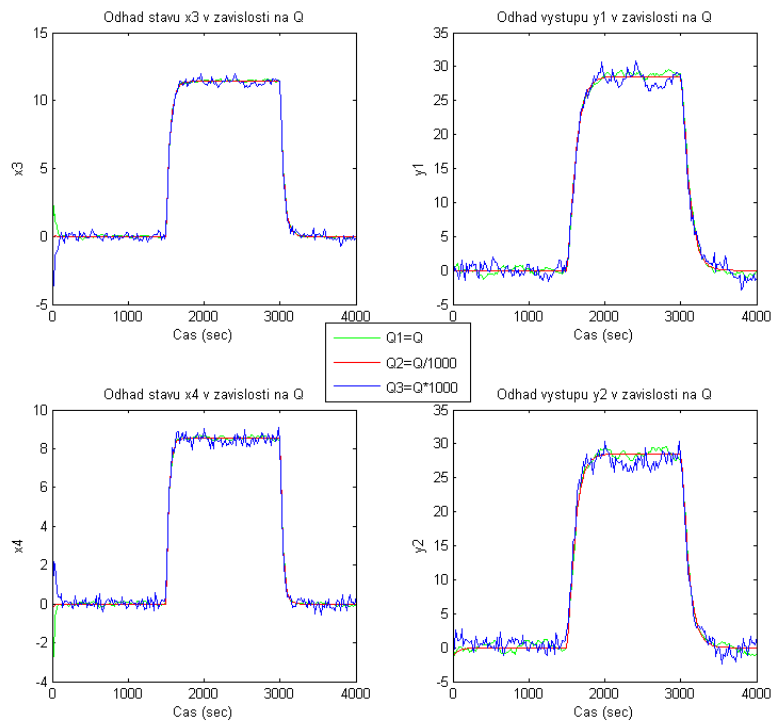
$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{P}(k+1|k) &= \mathbf{A}\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q},\end{aligned}$$

Kalmanovo zesílení celého filtru je pak

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{A}\mathbf{L}'(k).$$

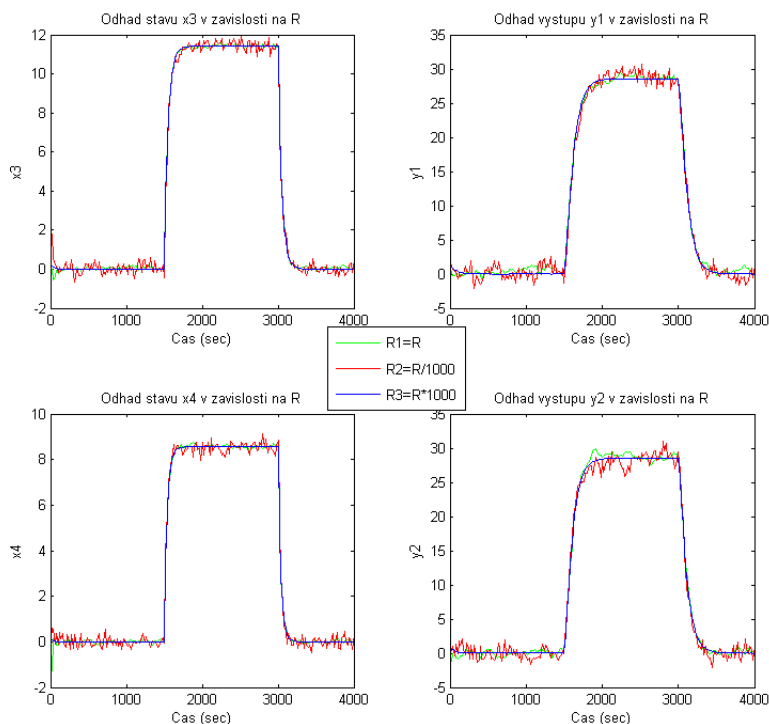
3.3 Variace parametrů

Nejprve při konstantní matici \mathbf{R} z bodu 1 navrhujeme Kalmanův filtr pro matice $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_2 = \frac{\mathbf{Q}}{1000}$ a $\mathbf{Q}_3 = 1000\mathbf{Q}$ odvozené od kovarianční matice \mathbf{Q} z bodu 1. Sledujeme vývoj odhadu stavů x_3 a x_4 a výstupů y_1 a y_2 , které přímo odpovídají prvním dvěma stavům.



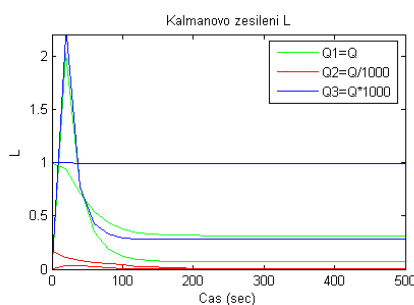
Obrázek 5: Závislost odhadu výstupů a stavů na volbě \mathbf{Q}

Obdobně při fixním \mathbf{Q} sledujeme závislost odhadu výstupů a stavů na volbě matice $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_2 = \frac{\mathbf{R}}{1000}$ a $\mathbf{R}_3 = 1000\mathbf{Q}$ odvozené od kovarianční matice \mathbf{R} z bodu 1.



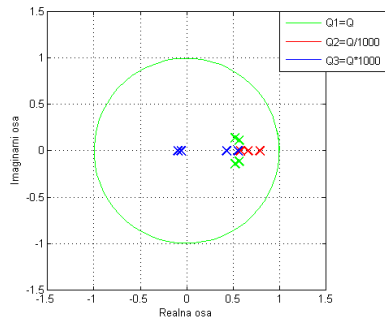
Obrázek 6: Závislost odhadu výstupů a stavů na volbě \mathbf{R}

Odhady jsou více zašuměné pro příliš velké \mathbf{Q} . Malé \mathbf{Q} sice poskytuje málo zašuměný odhad, ale vede na méně stabilní řešení. Volba \mathbf{R} je analogická. Příliš malé \mathbf{R} způsobí horší odhady stavů, ale pro velké \mathbf{R} jsou póly uzavřené smyčky $A - LC$ méně stabilní. Správná volba kovariančních matic je proto důležitá.

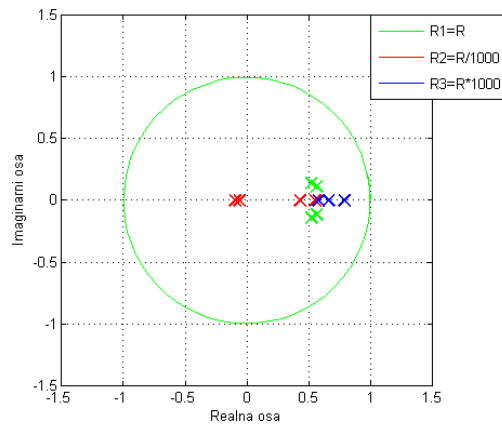


Obrázek 7: Závislost L na volbě \mathbf{Q}

Kalmanův filtr je optimálně nastaven pro šum odpovídající šumu na reálném systému, při změnách kovariancí šumu však dojde k zvýšení chyby v odhadu stavu.



Obrázek 8: Póly $A - LC$ v závislosti na volbě Q



Obrázek 9: Póly $A - LC$ v závislosti na volbě R

4 Použitá literatura

- [1] J. Štecha, V. Havlena: *Teorie dynamických systémů*. Skriptum ČVUT, FEL 2002.